47 Die Asymmetrie der Champernowneschen Zahl

Die Welt der Zahlen in ihren Grundstukturen zu verstehen wird immer wichtiger. Umso bedauerlicher ist es, dass dieser Aspekt fast nicht Gegenstand der Schul-Mathematik ist und daher in den Menschen nur sehr wenig Wissen anzutreffen ist. Das gilt vor allem für die sogenannten „Natürlichen Zahlen“ die das Grundmaterial darstellen von allem, was heute unter dem Titel „Digitalisierung“ öffentlich diskutiert wird. Es gibt aufgrund unserer Bildungstradition viel mehr nummerphöbe Menschen als nummerphile.
Die Digitalisierung und ihr Werkzeug, der Computer, dringen immer tiefer in unser persönliches Leben ein, und wir sind geistig überhaupt nicht vorbereitet, die Folgen und Konsequenzen vorstellungsmäßig einzuordnen.
Was sind Natürliche Zahlen? Wir Menschen gehen davon aus, man wisse das ohnehin. Zahlen sind das womit man zählt. Schon Kleinkinder lernen an den Fingern wahrgenommene Gegenstände abzuzählen. Auch wir Erwachsene fallen auf dieses Verhalten reflexartig zurück, wenn wir mehrere Wahrnehmungsgegenstände vor uns haben.
Jahrtausende hat sich der Mensch damit begnügt. Bis zur Wende des 19ten zum 20ten Jahrhunderts ein Mathematiker namens Peano einfache Regeln der Definition aufstellte, die mit nur drei Grundbegriffen das System der Zahlen festlegte: die Peano-Axiome.
Nur mit Null, Zahl und Nachfolger hat Giuseppe Peano (1858-1932) den ganzen Kosmos der Zahlen grundgelegt.
Er postulierte:

0 (Null) ist eine Zahl. 0 ist also nicht Nichts sondern Etwas.
Der Nachfolger einer Zahl ist auch eine Zahl.
Wenn zwei Zahlen den gleichen Nachfolger haben, dann sind sie gleich.

Die fünf Grundsätze von Peano lauten: (1) 0 ist eine Zahl. (2) Der Nachfolger irgendeiner Zahl ist eine Zahl. (3) Es gibt nicht zwei Zahlen mit demselben Nachfolger. (4) 0 ist nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl. (5) Jede Eigenschaft der 0, die auch der Nachfolger jeder Zahl mit dieser Eigenschaft besitzt, kommt allen Zahlen zu.

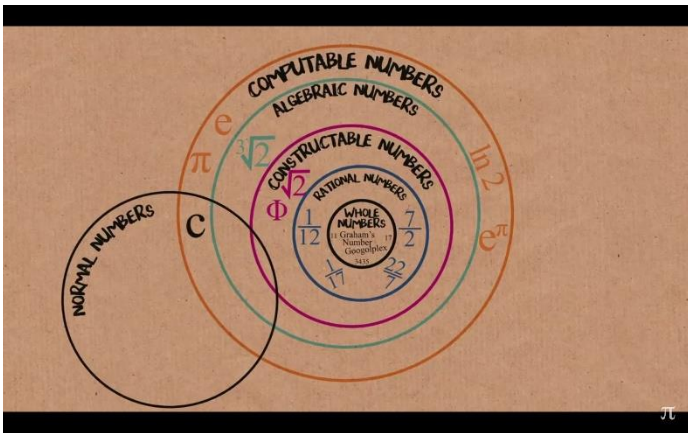
Auf diese Weise schuf Peano die Basis des Zählens. Man zählt, indem man immer den nächsten Gegenstand der Wahrnehmung im Geiste an den Vorgänger anreiht und so immer größere Zahlen erzeugt, denen man dann Namen geben kann. Diese Namen sind in jeder Kultur anders, bedeuten aber mathematisch immer das Gleiche.
Der Philosoph und Mathematiker Bertrand Russel (1872-1970) hat in seinem Buch „Die Philosophie der Mathematik“ ausführlich den Prozess der Zahl-Werdung beschrieben. Wir wollen uns hier auf die besonderen Eigenheiten einer der außergewöhnlichsten Zahlen beschränken die es gibt, die Champernownesche Zahl.
Bevor wir uns dieser Zahl C, (wie sie auch in Fachkreisen genannt wird) zuwenden, noch ein kurzer Abstecher zu einem der grundlegenden Tricks der Mathematiker-Zunft: Die Normalisierung von Zahlen. Die abendländische Tradition stellt sich vor, dass die Zahlen eine endlose Gerade ausgehend vom Null-Punkt bilden und die sich unendlich lange fortsetzt. Jeder Punkt auf dieser Geraden bildet eine Zahl. Wir kennen aber in Wirklichkeit nur den ersten Teil der geraden Linie von Null bis zur größten Zahl die uns im Leben je begegnet. Alle Zahlen die nach dieser „Lebensmaximalzahl“ liegen sind uns notwendigerweise unbekannt aber möglich. Man kann aber auch statt der Geraden eine geschlossene Jordankurve denken, auf denen die einzelnen Ziffern als Punkte angeordnet sind. Hier am IHI werden solche Jordankurven intensiv beforscht.

Wir müssen uns daher mit der Gewissheit abfinden, dass uns im Leben nur sehr begrenzt viele Zahlen tatsächlich unterkommen, obwohl wir wissen, wir könnten jede denkmögliche Zahl völlig richtig aufschreiben, wenn wir nur genügend lange leben und schnell genug schreiben. Dieser frustrierenden Erkenntnis haben wir Menschen uns entledigt, indem wir einfach immer nur einen Teil einer Zahl zur Kenntnis nehmen und die nicht bekannten Ziffern vorne oder hinten einfach erst mit 0 besetzen und danach überhaupt weglassen. Dieser zweistufige Prozess ist so fest in uns einprogrammiert, dass wir ihn gar nicht merken.
Wir sagen dann beispielsweise statt 345678923456: „etwas mehr als dreihundertfünfundvierzig Milliarden“ oder ähnliches. Je länger die Zahl, desto mehr Stellen lassen wir unter den Tisch fallen. Diesen Effekt machen sich Politiker und Finanz-Jongleure immer wieder zunutze um sich Vorteile zu verschaffen und die schlichten Bürger fallen ihnen auch immer darauf herein.
Nun könnte man sagen, wir sollten die Länge der Zahl immer gleich groß festlegen, so dass jedermann feststellen könnte, welcher „Zahlenvorrat“ in einer bestimmten Sache im Spiel ist. So könnte man wie bei den Telefonnummern oder den IBAN Kontobezeichnungen im Zahlungsverkehr die Stellenzahl festlegen und statt 23 die Zahl „00 00 23“ schreiben damit klargestellt wird, dass wenn die Zwei getippt wird schon viermal 0 getippt werden musste. Trotzdem bleibt der Zahlenwert 23 voll erhalten, weil die Führungs-Nullen zur Zahlenwertbestimmung nicht herangezogen werden. Bei langen Zahlen kann das ganz schön nervig werden. Zum Beispiel:

00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000023

statt einfach 23. In vielen Computeralgorithmen steckt aber diese umständliche Schreibweise drin ohne, dass wir uns der Konsequenzen auch nur ansatzweise bewusst sind.

Um das lästige Problem der Führungs-Nullen los zu werden, haben sich kluge Mathematiker die sogenannte Normalisierung von natürlichen Zahlen ausgedacht. Das geht so: wir schieben die unendlich lange Zahlengerade auf dem Intervall von 0 bis 1 zusammen und schreiben statt 23 nun 0,23. Wir können dann ganz leicht die ursprüngliche Zahl 23 zurückgewinnen indem wir 0,23 mit 100 multiplizieren. Wir schieben einfach das Kommazeichen um die Anzahl der Ziffernstellen hinter dem Komma nach rechts. Diese Technik wird auch Gleitkomma genannt.
Im nachstehenden Bild sind die verschiedenen Zahlenarten grafisch als Mengen dargestellt. Uns interessieren hier in diesem IHI-Bericht in erster Linie die „computablen Zahlen“, also jene Zahlen, die mittels Algorithmen errechenbar sind, auch dann, wenn sie noch von niemandem tatsächlich errechnet wurden, Potentielle Zahlen, die noch nie aufgeschrieben wurden. Von letzteren gibt es unendlich viel mehr als jemals verwendete Zahlen.



Doch nun zurück zur Zahl C: David Champernowne, nach dem diese Zahl benannt ist, war ein Professor sowohl in Oxford als auch in Cambridge. Er dachte darüber nach ob man eine Zahl eindeutig definieren könne, die alle natürlichen Zahlen beweisbar in sich trägt. Er stellte sich vor, diese endlos lange Zahl sei irgendwo aufgeschrieben und man könnte mit einem verschiebbaren Fenster (Ruler) wie auf einem

Rechenschieber jede gewünschte Zahl sichtbar machen. Dabei müsste man den Ruler in seiner Breite beliebig weit verstellen können, damit die gesuchte Zahl in das Fenster auch wirklich hineinpasst. Dann bräuchte man den Ruler nur so lange auf der Zahl C hin und her schieben, bis die gesuchte Zahl genau im Ruler-Fenster ablesbar ist. Diese Idee diskutierte David Champernowne (1912-2000) mit seinem Freund und Kollegen Alan Turing (1912-1954).
C ist eine „normale Zahl“ in der Mathematik. "A number is said to be “normal” in a particular base if every digit and every block of digits of any length occur with equal frequency. Note that the fact that a number is normal in one base does not imply anything about its normality in another base (unless the bases are related for example by both being powers of 2). Despite empirical evidence, no number expressed just in terms of standard mathematical functions has ever been rigorously proved to be normal. It has nevertheless been known since the work of Emile Borel in 1909 that numbers picked randomly on the basis of their value are almost always normal. And indeed with explicit constructions in terms of digits, it is quite straightforward to get numbers that are normal. An example of this is the number 0.1234567891011121314... obtained by concatenating the digits of successive integers in base 10 (see below). This number was discussed by David Champernowne in 1933, and is known to be transcendental." (Steven Wolfram, A New Kind of Science)
Aber wie sollte diese ominöse Zahl C konkret beschaffen sein? David Champernowne schlug vor, mit 0 und dem Komma-Symbol zu beginnen und dann, mit 1 beginnend, alle Nachfolger einfach hinten dran zu schreiben. Also 0,123456789101112131415.. usw.

Wir haben das im IHI-Labor auch gemacht und sehr schnell festgestellt, dass nach kurzer Zeit Probleme auftreten. Angefangen bei einer nervenden Langeweile, die beim Schreiben sehr bald auftritt, über Schlampigkeitsfehler beim Schreiben bis hin zum schlichten Problem der Zeilenüberläufe, steigt die Anzahl der technischen Schwierigkeiten schnell an.
Kommt man trotzdem in höhere Regionen der Zahlengröße, stößt man unweigerlich auf ein Lakunaritätsproblem. Immer größere „Lücken“ treten auf wo eine bestimmte Menge an Nullen augenscheinlich zwischen die scheinbar „sinnvollen“ Ziffern tritt. Z.B:

...23000000000000000000000000000000000000000240000000000000000000000000000000000000002
5000000000000000000000000000000000000000...

In Datenbanken besetzen diese Nullen einen immer größeren Anteil an Speicherplätzen und gelten daher als höchst lästiges Phänomen bei den Datenspezialisten. Mathematisch sind die Lakunaritäten aber unverzichtbar für die lückenlose Darstellung „Aller Natürlichen Zahlen“ IN.
Stellen wir uns einmal vor, wir hätten nach dem Modell des David Champernowne wirklich ALLE natürlichen Zahlen hintereinander aufgeschrieben und in einem gigantischen Monster-Computer abgespeichert. Dann hätten wir hinter jeder denkmöglich großen Zahl noch unendliche viele Nullen nicht berücksichtigt und - wenn wir die Schreibweise mit den Führungsnullen wählen - eine unendliche Zahl von vorlaufenden Nullen. Das sähe verkürzt etwa so aus:

0,42000000000000000.... versus ...00000000000000042

Wir sehen deutlich, dass hier zwischen den Nullen und der „eigentlichen“ Zahl 42 eine Asymmetrie herrscht. Diese drückt sich dadurch aus, dass einmal die Nullen „führend“ oder „vorlaufend“ sind und im Falle der normalisierten Darstellung nach dem Komma und der Zahl „nachlaufend“. Diese Eigenschaft der nachlaufenden Nullen hat dazu geführt, dass man in der konkreten Mathematik sich leichter tut, auf die nachlaufenden Nullen zu verzichten, aber trotzdem sich der Vorhandenheit der Nullen bewusst zu bleiben. Die Vorstellung, bei jeder konkreten Zahl im Alltag sich eine unendliche Zahl an vorlaufenden Nullen dazu denken zu müssen, erscheint uns dagegen als Perversion der Mathematik. Und doch sollte man das nicht einfach verdrängen.

In der heutigen Praxis der Digitalisierung treten nämlich nun immer mehr Datenstrukturen auf wo genau die Frage der Vor- oder nachlaufenden Nullen entscheidend für den operativen Erfolg sein kann. Bei Systemen der Finanzindustrie ist es ja schon bekannt, dass bei genügend großen Zahlenbewegungen ein kleiner Gewinn oder Verlust im tausendstel Promillebereich bereits über das finanzielle Überleben einer Institution entscheiden kann. So ist es im Bereich des Algo-Tradings an den großen Börsen üblich mit solchen mikroskopischen Margen zu kalkulieren. Auch Firmen wie Google verdienen eine winzige Menge an Geld mit jedem Click. Aber auch im Bereich der Pharma-Industrie sowie in der Biologie wird mit Mischungsverhältnissen im Part-per-Million-Bereich täglich gearbeitet. Je höher die rechnerische Auflösung von bildgebenden und repräsentativen Systemen mit der in den Naturwissenschaften gearbeitet wird, desto dringender wird eine gut ausgebildete Vorstellung von den Wirkungen von Nullstellen in der Wirtschaft und Wissenschaft.
Bei uns am IHI haben wir vor zwanzig Jahren noch mit Bildfiles von 200x300 Punkten gearbeitet, heute machen die Kids Selfis mit 2000X3000 Punkten und denken sich gar nichts dabei. Und die Auflösungsraten werden immer höher.
Ein kleines Rechenbeispiel: Nehmen wir an, es gäbe derzeit 3 Milliarden (10^9) Handys in der Welt. Jedes dieser Geräte speichert 100 Fotos. Jedes Foto hat 1000000 Bildpunkte (ein Megapixel). Die Menge aller gespeicherten Bildpunkte beträgt daher 3x10^17 Pixel. Das ist eine gewaltige Zahl, die niemand genau kennt.
Machen wir noch ein Gedankenexperiment. Wir wollen wissen, wie lang die Zahl C für unser gesamtes Universum nach unserem derzeitigen physikalisch/kosmologischen Wissensstand sein könnte. In dieser Zahl muss jedes Detail unseres gesamten Universums genau „verbucht“ sein.
Gehen wir davon aus, dass unser Universum seit ca. 15 Milliarden Jahren besteht. Das sind 1,5x10^10 Jahre. Diese bereits riesige Zahl mit 9 dazu gedachten Nullen hinter der Leitzahl 1,5 multiplizieren wir nun mit 365, um die Anzahl der Tage seit dem Urknall zu errechnen.
Wir multiplizieren also 1,5x10^10 mit 3,65x10^2. Das Ergebnis ist 5,475x10^12. Die Zahl der unsichtbaren Nullen steigt bereits von 9 auf 11. Wenn wir jetzt noch davon ausgehen, dass jeder Tag 24 (2,4x10^1) Stunden hat und jede Stunde 3600 (3,6x10^3) Sekunden, können wir mit jedem Taschenrechner die Zahl 4,73x10^16. So viele Sekunden ist unser Universum alt.
Wenn wir nun davon ausgehen, dass uns die Physiker lehren, die Planck-Zeit sei 10^-44 Sekunden (Die **Planck**-**Zeit** ist eine **Planck**-Einheit und beschreibt das kleinstmögliche Zeitintervall, für das die bekannten Gesetze der Physik gültig sind. Sie ergibt sich aus der **Zeit**, die Licht benötigt, um eine **Planck**-Länge zurückzulegen und eine theoretische Zustandsveränderung zu bewirken. Benannt wurde sie nach Max **Planck**. Quelle Wikipedia), dann können wir inzwischen leicht errechnen, dass unser Universum etwa 4,73x10^60 Planck-Intervalle alt ist. Also wenn es uns gelänge, in einer Planck-Einheit eine Ziffer unserer Champernowne-Zahl aufzuschreiben – was kein denkmöglicher Computer je erreichen könnte – dann wäre unsere physikalische Zahl C lediglich 10^60 Stellen lang. Das ist wohl gigantisch aber nur ein Klacks gegenüber der unendlich-stelligen theoretischen Zahl C. Das heißt praktisch, dass hinter der auf schreibbaren Zahl C immer noch unendlich viele nachlaufende Nullen versteckt sein müssen. Wir wissen aber niemals ob diese nachlaufenden Nullen wirklich immer Nullen sind oder ob sich andere Ziffern zwischen den vielen Nullen verstecken.
Wir sehen, dass wir uns in der konkreten Mathematik der Computernetze immer nur einen ganz winzigen Teil der möglichen Zahlen zu Nutze machen können und uns daher immer der Lückenhaftigkeit unserer Datenbestände bewusst sein sollten, wenn wir meinen, dass schon alles, was in der Welt vorgeht, gespeichert wird. Oder dass man mit bürokratischer Erbsenzählerei die Welt lenken könnte. Leider glauben sehr viele Menschen an diese Möglichkeit und fordern immer noch mehr Bürokratie.

76. IHI Bericht, 18.4.2019