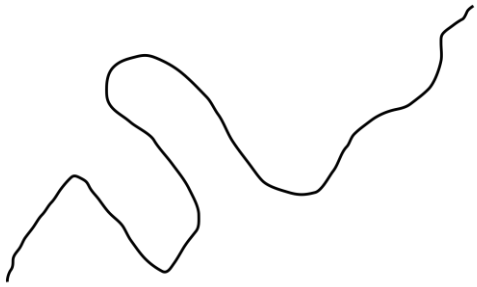
37 Quantisierte Jordankurven

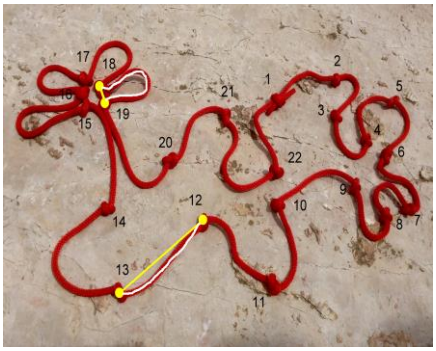
Im 61. IHI-Bericht wurde darauf hingewiesen, dass sich das IHI schon sehr lange künstlerisch und wissenschaftlich mit den Übergangsphänomenen vom fiktiven mathematischen Punkt zum real untersuchbaren Morphem (MO, Shape, Holon) befasst. Dabei spielen die Eigenschaftsbildungsprozesse eine große Rolle. Besonders interessant ist die Form-Eigenschaft von Morphemen und deren Genese (schon im Jahre 1988, Visa-Magazin wurde Kotauczek in den Medien als „Der Herr der Morpheme“ apostrophiert).
Es wurden ausführlich anhand von einfachen Schnur-Experimenten die wichtigsten Eigenschaften von Jordankurven beschrieben und das Phänomen der Pelastration und des Holons erklärt. Allerdings wurde die interne Struktur der Kurve nicht näher untersucht. Wie bei der im Experiment verwendeten roten Schnur wurde das kurvenbildende Substrat als gegeben angenommen. Die Mathematik der Jordankurve nimmt auf physikalische Gegebenheiten wie Schnurdicke, Biegsamkeit, Farbe, Dehnbarkeit, Zylindrigkeit und viele andere Parameter keinerlei Rücksicht und geht von wirklichkeitsfremden Idealisierungen aus. Für viele wissenschaftliche Theorien mag das ja ausreichend sein, aber für eine industrielle Praxis ist eine solche Idealisierung nicht geeignet.
Für anwendungsnahe Überlegungen ist die Beziehung der Kurvenpunkte zueinander und zur eigentlichen Jordankurve zu hinterfragen. In der klassischen Geometrie gilt das Newtonsche Postulat, dass die Punkte auf einer Linie unendlich dicht aneinander liegen und an den Berührungsgrenzen „verschmelzen“. Das Verschmelzungspostulat wurde schon vom Zeitgenossen Leibniz mit dem Hinweis bestritten, der Punkt sei ein unzerstörbares Individuum und daher immer vom nächsten Punkt unterscheidbar. Das Prinzip der Erhaltung der Information dürfe nicht gebrochen werden. Die moderne quantenphysikalische Betrachtungsweise geht ebenfalls von der Unmöglichkeit des Verschmelzungs-Arguments aus. Auf die Kontroverse Verschmelzung versus Erhaltung des Unterschieds geht auch das Buch des berühmten Stanford-Physikers Leonard Susskind „The Black-Hole War“ ein, wo diese Thematik anhand der Schwarzen Löcher ausführlich abgehandelt wurde.
In der praktischen Versuchsanordnung des IHI wurde dieser Betrachtungsweise bei der Verwendung einer Schnur nicht Rechnung getragen. Bei dieser lässt sich nur sehr schwer eine Untergliederung der Kurvenpunkte sauber darstellen. Die in der Versuchsanordnung verwendete Perlon Schnur weist eine geflochtene Oberfläche auf und hat daher kein abgrenzbares, modulares Element wie beispielsweise eine Kette.
Um eine saubere Quantisierung in das Modell zu bekommen wurde im nächsten Entwicklungsschritt auf ein Baukastenmodell zurückgegriffen das aus permanenten Stabmagneten und Stahlkugeln besteht. Die längengleichen Stäbe stehen für das Längenquant (edge) und die Kugeln für die Vertices.
Das IHI vertritt die These, dass komplexe Datenzusammenhänge die als COSMO´s organisiert sind, vom Menschen nur dann vernünftig eingeordnet werden können, wenn sie in eine sensordirektionale Form transformiert werden (60. IHI-Bericht). Dabei spielt die Auswahl des geeigneten Sensorkanals in der Bezugsperson eine entscheidende Rolle. Manche Menschen können aufgrund ihrer Begabung und Ausbildung eher auditive Datenstrukturen verstehen andere wiederum brauchen visuelle Strukturen. Im Umfeld der BEKO sind meist Menschen die Adressaten, die auf die Wahrnehmung visueller Sensorinputs trainiert sind. Schaubilder, Diagramme und andere Farb-Form-Strukturen wie Realbildsimulationen sind in dieser Zielgruppe das Mittel der Kommunikation.
Besonders bei der Visualisierung von Sachverhalten, die aus dem Bereich Wirtschaft und Technik stammen, spielen die quantisierte Jordankurve und die Martingale eine Schlüsselrolle. Das Konzept der Jordankurve stammt aus der Geometrie – also einem Teilgebiet der Mathematik. Im 62. IHI-Bericht wurde ausführlich auf die Bildungsprinzipien von Jordankurven und deren Entsprechungen in der Natur eingegangen und einige praktische Experimente beschrieben wie sie am IHI durchgeführt werden.
„Jordan-Kurven (bzw. einfache Kurven) sind nach Camille Jordan benannte mathematische Kurven, die als eine homöomorphe Einbettung des Kreises S 1 oder des Intervalls I 1 = [0; 1] in einen topologischen



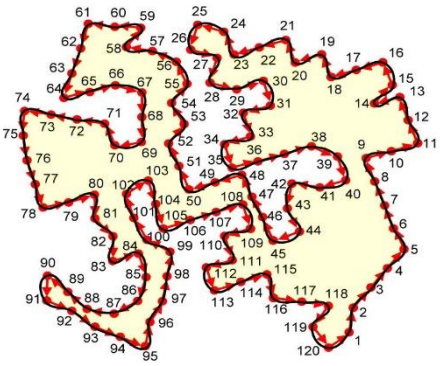
Raum definiert sind.“ Diese Definition erhalten wir, wenn wir Wikipedia abfragen. Für die meisten von uns sagt diese Definition gar nichts. Wenden wir daher die Kunst der Visualisierung an und die Sache wird für jedermann im wahrsten Sinne des Wortes klarer ersichtlich. Wikipedia ist das offensichtlich auch aufgefallen und liefert zur Definition folgende Abbildung einer Jordankurve:

Diese Kurve hat mehrere bemerkenswerte Eigenschaften: Sie ist endlich, hat also einen Anfang und ein Ende, wobei offen bleibt in welcher Richtung die Kurve durchlaufen wird.
Sie ist stetig, das heißt, es gibt keine scharfen Eckpunkte auf der Kurve. Man kann an jedem Punkt der Kurve eine Tangente anlegen und damit die Krümmung in diesem Punkt feststellen. Und man kann die oben gezeichnete „offene“ Jordankurve durch das verbinden der beiden Endpunkte mittels eines Kreisbogens schließen ohne dass die Kurve geschnitten werden muss. Durch letztere Operation wird die „offene Jordankurve“ zu einer „geschlossenen Jordankurve“. Diese ist der Untersuchungsgegenstand des IHI. Wir untersuchen bestimmte Verhaltensweisen der geschlossenen Jordankurve auf ihre Eignung, komplexe Datenbestände so zu organisieren, dass sie für den Menschen aussagekräftig werden. Das Mittel des IHI ist die Visualisierung und die Sonifikation. In Zusammenarbeit mit dem Wiener Musikseminar entstehen Sonifikationen, im Rahmen der BEKO-Labors entstehen verschiedenste Visualisierungen. Beide Methoden haben Vorteile und Nachteile.
Die Sonifikation ist extrem zeitabhängig und zielt hauptsächlich auf Emotionalisierung der Zielperson. Der Nachteil von Sonifikationen ist die die emotionale Bandbreite des Menschen. Die Visualisierung kann wohl auch emotionalisieren wird aber meist zur Verstandesansprache gewählt (z.B. in den bei Managern so beliebten Powerpoint-Folien). Daher ist in der Wirtschaft die Visualisierung von größerer Bedeutung als die Sonifikation. Letztere ist jedoch ein wichtiger Wirtschaftsfaktor in der Unterhaltungsindustrie.
Da die Jordankurve in ihrer allgemeinen Form mathematisch sehr unhandlich ist weil sie nur mit der Infinitesimalrechnung berechenbar ist und außerdem das zentrale Werkzeug der modernen Wissenschaft der digitale Computer ist, verwendet das IHI bei seinen experimentalen Untersuchungen die quantisierte Form der Jordankurve. Der Vorgang der Quantisierung wird in der Wissenschaft sehr unterschiedlich definiert. Je nach Fachgebiet gibt es unterschiedliche Methoden der Quantisierung. Das IHI geht daher an die Wurzeln und übernimmt die Definition direkt aus der berühmten Vorlesung des Mathematikers Bernhard Riemann aus dem Jahre 1854 „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“: „Bestimmte, durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedenen Theile einer Mannigfaltigkeit heißen Quanta. Ihre Vergleichung der Qualität nach geschieht bei diskreten Größen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung.“ Mit der Einführung diskreter Quanta wird jede geschlossene Jordankurve zu einem regelmäßigen Vieleck. Die Regelmäßigkeit drückt sich in der exakt gleichen Länge aller Punktabstände aus. Dieser Effekt ist ein grundlegendes Merkmal der IHI-Experimente. In der Software-Technologie wird eine solche Jordankurve auch „Pfad“ genannt. In der Sprache Riemanns ist eine Jordankurve eine sogenannte 1-Mannigfaltigkeit, weil jeder Punkt immer nur einen einzigen direkten Nachfolger haben kann. Die Quantisierung der Kurve geschieht durch die Konvention, dass zwischen den Punkten ein fixer bekannter Abstand besteht der zwar beliebig groß (oder klein) sein kann aber von Punkt zu Punkt immer gleich ist. Daher kann durch reines abzählen der Punkte die Länge der Kurve präzise bestimmt werden. Aber auch die Krümmung der Kurve wird durch abzählbare Knickung in jedem Punkt klar definiert. Offen bleibt, ob die Richtung

der Abstandstrecke auf die Ursache des Punktes oder die Wirkung des Punktes verweist. Dies hat vom Beobachter der Kurve, vom Experimentator, bestimmt zu werden.
Der eklatante Nachteil jeder Quantisierung ist der unvermeidliche Verlust an Information der aufgrund des Nyquist-Effektes stattfindet. Wie in der nächsten Abbildung hervorgeht kann beispielsweise die Quantisierung beim Schnurmodell ganz einfach durch Einfügen von Knoten dargestellt werden:

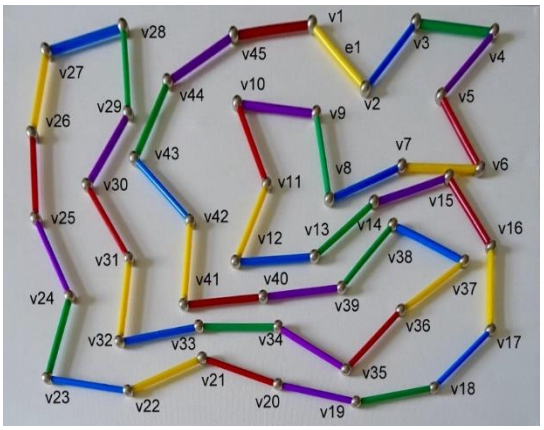


Im dargestellten Versuch wurde eine (rote) Schnur in regelmäßigen Abständen mit Knoten versehen und an den Enden zusammengeknüpft (K1). Dann wurden verschiedene Jordankurven willkürlich gelegt. Die vorher gleichen Abstände – die auf der Schnur gemessen immer noch gleich sind – sind bezogen auf ein orthogonales Koordinatensystem der Ebene auf der die Jordankurve aufliegt, durch die Krümmung der Schnur deutlich verkürzt. Bei Knoten 12 und 13 ist der Kürzungseffekt gering, weil die Krümmung nicht sehr von der gelb eingezeichneten geraden Linie abweicht. Ganz anders ist das bei den Knoten 18 und 19. Hier ist die gelbe Verbindungsgerade deutliche anders als die weiß gezeichnete Schnurachse. Alle Informationen auf dieser weißen Schlinge werden bei der Quantisierung auf die gelbe gerade vereinfacht und eingeebnet. Das ist der Nyquist-Verlust an Information.
Bei Kurven, die sich so verhalten wie zwischen den Knoten 15 bis 19 kann mit der gewählten Auflösung (der Schnurabstand zwischen den Knoten) die Jordankurve nicht genau genug abgebildet werden. Der Knotenabstand in der Schnur muss verringert werden, bis die erwünschte Abbildungsgenauigkeit erreicht wird. In der täglichen Praxis der Datenverarbeitung ist das Nyquist-Problem eine ständige Quelle von Auseinandersetzungen. Zum Beispiel ist der Stichtagsintervall im betrieblichen Rechnungswesen Gegenstand staatlicher Regularien und Mittel des Managements, gewünschte Botschaften nach außen durch „Fakten“ zu untermauern.
Im nächsten Bild ist eine wesentlich komplexere Jordankurve mit 120 Vertices dargestellt. Die roten Pfeile sind in diesem Falle Wirkungs-Quant-Vektoren, die schwarze Kurve wäre die simulierte Seilkurve. Man sieht, dass das rote Vieleck und die schwarze Kurve nicht völlig deckungsgleich sind. Die Differenzen sind der Nyquist-Informationsverlust.

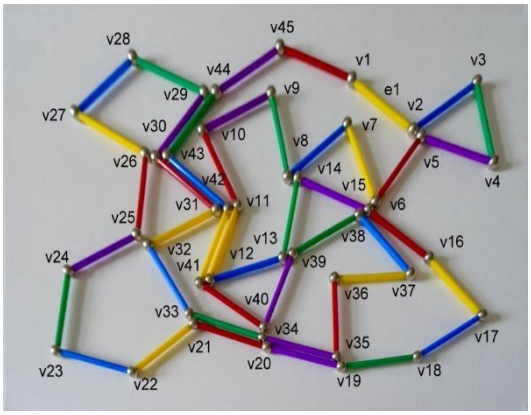


Auch bei technischen Messungen kann der Nyquist-Effekt absichtlich oder unabsichtlich zu verzerrten Aussagen führen. Das Abgasproblem bei den Dieselmotoren hat international hohe Wellen geschlagen so wie die Migrantenanteile in der Kriminalstatistik. Hier treffen die emotionalen Effekte der Visualisierung mittels Jordankurven und vernunftbasierte Erkenntnisgewinne mit voller Wucht

aufeinander. Mathematisch kann man jede analoge Jordankurve mit beliebiger Genauigkeit auf einer quantisierten Kurve abbilden. In der Realität sind der Abbildung physikalische Grenzen gesetzt, die auch mit höchstem Aufwand nicht vermeidbar sind. Spätestes im Planck-Bereich schlägt die Heisenberg´sche Unschärfe unbarmherzig zu und macht jede Genauigkeitssteigerung mit absoluter Sicherheit zunichte. Das ist die Grundlage der Quantenphysik.
Hier zwei weitere Beispiele von physischen experimentellen quantisierten Jordankurven im IHI-Labor:



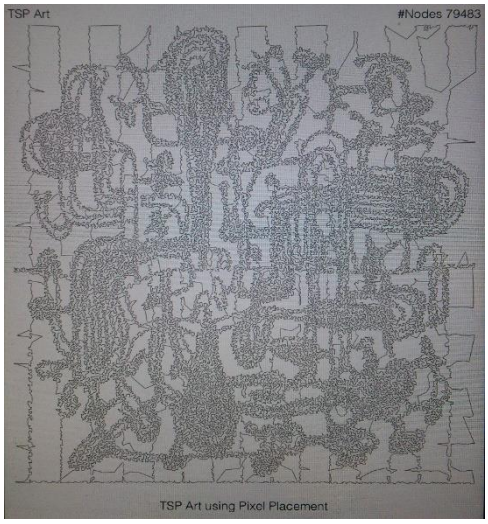
Beide Bilder weisen 45 Vertices auf. (Der Begriff Knoten wird in der Graphentheorie durch Vertix ersetzt) „Ein Vertex ist in der Geometrie eine Ecke eines Polygons.



In der Graphentheorie ist er ein Synonym für einen Knoten.“ sagt Wikipedia.

Die bunten Stäbe zwischen den Vertices sind alle gleich lang. Der Knickwinkel bei den einzelnen Vertices definiert den Kurvenverlauf. Im ersten oberen Bild kann man sehr schön mehrere Pelaststrationen erkennen mit den Scheitelpunkten v10, v12 oder v37. Da schiebt sich die Auswölbung der Kurve in die andere und schiebt diese nach links (v10, v12) oder nach rechts (v37). Dabei gilt die Konvention, dass die Kurvenlinie niemals unterbrochen werden darf und die Kurve sich nirgends schneidet. Man nennt solche Kurven auch selbstmeidend. Die Punkte dürfen sich wohl berühren aber nicht verschmelzen.
Das untere Bild zeigt eine komplexere Situation. Hier treten bereits sogenannte Holone auf, die sich durch dichte Annäherung mehrerer Punkte bilden und gewissermaßen eigenständige, erkennbare Gebilde erzeugen den gleichzeitigen Teil des Ganzen und abgrenzbare Individualitäten sind. Zum Beispiel das Holon bei v31, v42 und v11. Bei Kurven mit mehr Vertices ist die Wahrscheinlichkeit der Holon-Bildung höher als bei Kurven mit weniger Vertices. Das IHI untersucht diese Holonbildung in Jordankurven mit hohen Zahlen an Vertices. Die Gestaltbildung durch Holone ist auch ein wichtiger Gegenstand der Bildverarbeitung im Computer.

Am Schluss noch ein Beispiel einer quantisierten Jordankurve mit 79483 Vertices und deutlich sichtbaren Holonen die durch Pelastration gebildet wurden. Hier ist auf den ersten Blick deutlich ersichtlich welche Komplexitäten in Jordankurven stecken können.
Hier wurde auch noch zusätzlich der Weg, der über die Vertices längs der quantisierten Jordankurve führt, optimiert. Ähnliche Algorithmen stecken in allen Logistik-Softwarepaketen wo entweder nach Strecke oder nach eingesetzter Energie oder nach Kosten optimiert werden soll. So theoretisch die IHI-Untersuchungen auf den ersten Blick erscheinen mögen, Jordankurven und Holone sind eminent wichtig in vielen zukunftsträchtigen Geschäftsfeldern wie z.B. „Industrie 4.0“ oder alternative Verkehrsergänzungssysteme (BEKO-Schweber), die BEKO laufend bearbeitet.



63. IHI Bericht, 28.7.2016